

IOANA MONALISA MANEA
CRISTINA NEAGOE

**Culegere de probleme
de matematică
pentru clasa a 8-a**

EDITURA PUIȘOR
București

2025

1. Recapitulare. Teste de evaluare inițială	6
2. Intervale de numere reale. Inecuații în \mathbb{R}	9
2.1. Mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor lor	9
2.2. Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor	11
2.3. Intersecția și reuniunea intervalelor	12
2.4. Inecuații de forma $ax+b \geq 0$ ($\leq, <, >$), unde $a, b \in \mathbb{R}$	14
Teste de evaluare	16
3. Calcul algebric în \mathbb{R}	18
3.1. Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere; reducerea termenilor asemenea	18
3.2. Înmulțirea, împărțirea și ridicarea la putere a numerelor reale reprezentate prin litere	19
3.3. Formule de calcul prescurtat	21
3.4. Aplicații	26
3.5. Descompuneri în factori utilizând reguli de calcul în \mathbb{R}	29
Teste de evaluare	33
3.6. Frații algebrice: amplificarea și simplificarea	35
3.7. Operații cu fracții algebrice	37
Teste de evaluare	40
3.8. Ecuații de forma $ax^2+bx+c=0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$	41
Teste de evaluare	43
4. Funcții	45
4.1. Funcții definite pe mulțimi finite, exprimate cu ajutorul unor diagrame, tabele, formule; graficul unei funcții, reprezentarea geometrică a graficului unor funcții numerice	45
4.2. Funcții de forma $f:D \rightarrow \mathbb{R}, f(x)=ax+b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ și D este o mulțime finită de numere reale sau un interval nedegenerat; interpretare geometrică; lecturi grafice	47
4.3. Elemente de statistică: indicatorii tendinței centrale (frecvență, medie, mediană, mod și amplitudine ale unui set de date)	52
Teste de evaluare	54
5. Elemente ale geometriei în spațiu	56
5.1. Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări, determinarea dreptei, determinarea planului, relații între puncte, drepte, plane	56
5.2. Corpuri geometrice: piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat	57
5.3. Corpuri geometrice: prisma dreaptă, paralelipipedul dreptunghic, cubul	58
5.4. Corpuri geometrice: cilindrul circular drept, conul circular drept	60
Teste de evaluare	61
5.5. Poziții relative a două drepte în spațiu, drepte paralele	62
5.6. Unghiul a două drepte în spațiu	63
5.7. Poziții relative ale unei drepte față de un plan, dreaptă paralelă cu un plan	64
5.8. Poziții relative a două plane, plane paralele	65

5.9. Secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate, trunchiul de piramidă și trunchiul de con circular drept	67
5.10. Drepte perpendiculare, dreapta perpendiculară pe un plan; aplicații: înălțimea unei piramide, înălțimea unui con circular drept	68
5.11. Distanța dintre două plane paralele, înălțimea prisme drepte, a paralelipipedului dreptunghic, a cilindrului circular drept, a trunchiului de piramidă, a trunchiului de con circular drept	70
Teste de evaluare	71
5.12. Plane perpendiculare, aplicații: secțiuni diagonale, secțiuni axiale în corpurile studiate	72
5.13. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan	73
5.14. Unghiul dintre o dreaptă și un plan, lungimea proiecției unui segment	74
5.15. Teorema celor trei perpendiculare; calculul distanțelor de la un punct la o dreaptă, de la un punct la un plan, între două plane paralele	76
5.16. Unghi diedru, unghi plan corespunzător diedrului; unghiul dintre două plane	78
5.17. Plane perpendiculare	80
Teste de evaluare	81
6. Arii și volume ale unor corpuri geometrice	83
6.1. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate, determinare prin calcul	83
6.2. Paralelipipedul dreptunghic	83
6.3. Cubul	85
6.4. Prisma patrulateră regulată	87
6.5. Prisma triunghiulară regulată și prisma hexagonală regulată	88
Teste de evaluare	90
6.6. Piramida patrulateră regulată	92
6.7. Piramida triunghiulară regulată, tetraedrul și piramida hexagonală regulată	94
6.8. Trunchiul de piramidă patrulateră regulată	96
6.9. Trunchiul de piramidă triunghiulară regulată și trunchiul de piramidă hexagonală regulată	98
Teste de evaluare	101
6.10. Cilindrul circular drept	102
6.11. Conul circular drept	104
6.12. Trunchiul de con circular drept	106
6.13. Sfera	108
Teste de evaluare	109
7. Modele de teste pentru Evaluarea Națională	111
8. Soluții	125

1. Recapitulare. Teste de evaluare inițială

Testul 1

- I. 1. Rezultatul calculului $-0,2 \cdot 5 + (-1)^2$ este: a) 2; b) 0; c) 1; d) 3.
2. Numărul elementelor din mulțimea $\{3,8; -1,(3); \sqrt{36}; \pi\} \cap \mathbb{Q}$ este:
a) 1; b) 4; c) 3; d) 2.
3. Cel mai mare număr întreg mai mic decât $-3\sqrt{3}$ este ...
4. **(MP)** Un copil a cheltuit 10% din banii lui ceea ce reprezintă 6 lei. Ce sumă a avut la început? a) 100 lei b) 60 lei c) 30 lei d) 200 lei.
5. Soluția reală a ecuației $1 - 2x = 3$ este: a) 1; b) -1; c) 2; d) -2.
6. Trapezul cu bazele de lungimi 24 cm și 10 cm are linia mijlocie egală cu:
a) 12 cm; b) 5 cm; c) 17 cm; d) 7 cm.
7. Un dreptunghi $ABCD$ are $AB = 3$ cm și $AC = 5$ cm. Perimetrul dreptunghiului este de:
a) 16 cm; b) 14 cm; c) 12 cm; d) 18 cm.
8. Valoarea lui $\sin 30^\circ$ este: a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
9. În $\triangle ABC$ se știe că $DE \parallel AC$, $BE = 6$ cm, $EC = 8$ cm, $D \in [AB]$, $E \in [BC]$.
Atunci valoarea raportului $\frac{AD}{AB}$ este: a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{4}{3}$; c) $\frac{4}{7}$; d) $\frac{3}{7}$.
- II. 10. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale inecuația $2x - \frac{x+1}{2} \leq 1$.
11. **(MP)** 7 kg mere și 3 kg portocale costau 39 lei. După o scumpire cu 20% la mere și 10% la portocale, 3 kg mere și 5 kg portocale costă 43,80 lei. Cât costă 1 kg de mere, respectiv 1 kg de portocale?
12. Fie $\triangle ABC$ cu $AB = 8$ cm, $\sphericalangle B = 60^\circ$, $\sphericalangle C = 45^\circ$ și $AD \perp BC$, $D \in BC$. Dacă P, R , și Q sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[AC]$ și, respectiv, $[BC]$ aflați: a) lungimea înălțimii AD ; b) perimetrul $\triangle ABC$; c) perimetrul patrulaterului $PDQR$.

Testul 2

- I. 1. Rezultatul calculului $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} - 0,25$ este: a) 2; b) -2,5; c) 1,25; d) -1,75.
2. Lungimea cercului de diametru 5 cm este: a) 10π cm; b) 5π cm; c) $2,5\pi$ cm; d) 25π cm.
3. Cel mai mare număr natural, mai mic decât $2\sqrt{5}$ este ...
4. Probabilitatea ca, alegând un număr din primele 10 numere naturale, acesta să fie prim este de ...
5. Soluția naturală a ecuației $|1 - 3x| = 5$ este: a) -2; b) 1; c) 2; d) 3.
6. Dacă o linie mijlocie într-un triunghi echilateral are 8 cm atunci perimetrul triunghiului este de: a) 24 cm; b) 12 cm; c) 48 cm; d) 8 cm.
7. Un paralelogram $ABCD$ cu $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $\sphericalangle B = 30^\circ$ are aria ...

8. Un dreptunghi $ABCD$ cu $AB=5$ cm și aria de 60 cm² are diagonala de ...

9. Patrulaterul în care diagonalele se înjumătățesc și sunt congruente este ...

II. 10. Rezolvați: a) $\frac{x+3}{2} - \frac{x-1}{3} = x - \frac{4-x}{6}$; b)
$$\begin{cases} 2-3(x+y) = 5x-2y \\ 5-\frac{x}{2} = x-\frac{x-y}{2} \end{cases}$$

11. **MP** După ce a mâncat 35% din bomboanele pe care le avea, unui copil i-au rămas cu 6 mai multe decât a mâncat deja. Câte bomboane a avut la început?

12. Fie $ABCD$ un trapez isoscel $AB \parallel CD$, $AB=6\sqrt{2}$ cm, $DC=8\sqrt{2}$ cm și $AC \perp DB$.

a) $AC=?$ b) $A_{ABCD}=?$ c) $P_{ABCD}=?$ d) $d(A;BC)=?$

Testul 3

I. 1. Rezultatul calculului $\frac{3}{8} : (-4)^{-1} + \left(-\frac{2}{3} + 1\right)$ este egal cu:

a) $-\frac{1}{6}$; b) $\frac{11}{6}$; c) $-\frac{7}{6}$; d) $-\frac{19}{6}$.

2. Fie mulțimea $A = \left\{-\sqrt{8}; \sqrt{36}; \sqrt{\frac{2}{9}}; -\sqrt{6\frac{1}{4}}; (-3)^2\right\}$. Mulțimea $A \cap \mathbb{Z}$ are ... elemente.

3. Aria cercului de rază $\sqrt{2}$ cm este: a) $2\sqrt{2}\pi$ cm²; b) 2π cm²; c) 8π cm²; d) 4π cm².

4. Efectuând produsul cartezian $\{2; 3\} \times \{0; 2\}$ se obține ...

5. **MP** O persoană avea inițial suma de 340 lei. A cheltuit o parte din ea rămânând cu 153 lei. Procentul reprezentând suma cheltuită este: a) 44%; b) 45%; c) 52%; d) 55%.

6. Perimetrul unui pătrat este egal cu 48 cm. Aria pătratului este de ... cm².

7. Dacă un dreptunghi are diagonala de 25 cm și lungimea de 20 cm, perimetrul acestuia este de: a) 70 cm; b) 80 cm; c) 50 cm; d) 300 cm.

8. Dacă $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ și $AB=6$ cm, $AC=8$ cm, $BC=12$ cm iar perimetrul $\triangle DEF$ este 78 cm atunci lungimea laturii EF este egală cu: a) 18 cm; b) 52 cm; c) 24 cm; d) 36 cm.

9. Calculând $\operatorname{tg} 45^\circ - \sin 30^\circ$ se obține: a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$; d) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

II. 10. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $\frac{x-3}{2} - \frac{3x+1}{4} = \frac{2(x+6)}{3}$.

11. Fie numerele $a = \left(\sqrt{27} - \sqrt{5^{-1}} - \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{3}} + 1\right)^{-1}$ și $b = \sqrt{4^2 + 8^2}$.

a) Să se determine $x \in \mathbb{Z}$ știind că $x < a < x+1$.

b) Să se calculeze media aritmetică a numerelor a și b .

12. Fie $\triangle ABC$ cu $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ și (BM bisectoarea $\sphericalangle ABC$, $M \in [AC]$ iar $ME \perp BC$, $E \in [BC]$).

Știind că $\sphericalangle BMA = 60^\circ$ și $BM = 12$ cm, să se determine: a) înălțimea AD a $\triangle ABC$, $D \in [BC]$;

b) raportul ariilor $\triangle CEM$ și $\triangle CAB$; c) perimetrul $\triangle ABC$, rotunjit la cel mai apropiat număr întreg.

Testul 4

I. 1. Rezultatul calculului $\left(-1\frac{1}{9}\right) : \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} - \frac{5}{36}\right)$ este: a) 4; b) -4; c) -1; d) 1.

2. Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| \leq 4\}$. Atunci $A \cap \mathbb{N}$ are ... elemente.

3. Valoarea de adevăr a propoziției „ $-2\sqrt{3} < -3,5$ ” este: a) A; b) F.

4. În $\triangle ABC$ cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 4$ cm și $BC = 5$ cm, $\sin(\sphericalangle C)$ este:

a) $3/4$; b) $5/4$; c) $4/5$; d) $3/5$.

5. Dacă 420 reprezintă 35% dintr-un număr atunci acesta este egal cu:

a) 1200; b) 174; c) 147; d) 84.

6. Ecuația $a + 3(x - 2) = x$ admite ca soluție numărul întreg -2 . Valoarea lui a este ...

7. Dacă aria unui romb este egală cu 24 cm^2 și o diagonală are lungimea de 8 cm, cealaltă diagonală este egală cu: a) 3 cm; b) 4 cm; c) 6 cm; d) 8 cm.

8. Perimetrul unui triunghi echilateral este egal cu 48 cm. Aria lui este ... cm^2 .

9. Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ ale $\triangle ABC$ se iau punctele M , respectiv N astfel încât $MN \parallel BC$, $AB = 20$ cm, $AM = 4$ cm. $NC = 24$ cm. Lungimea laturii AC este egală cu:

a) 6 cm; b) 8 cm; c) 16 cm; d) 30 cm.

II. 10. Să se arate că $x \in \mathbb{Z}$ dacă $x = (2\sqrt{45} - \sqrt{20})^{-1} \cdot \left(\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{2}} - \sqrt{1\frac{3}{5}}\right) : \sqrt{200^{-1}}$.

11. **MP** Un automobilist avea de parcurs 180 km. Dacă mărește viteza cu 20% va ajunge cu o jumătate de oră mai devreme. Cu ce viteză își propusese să meargă inițial?

12. Fie $\triangle ABC$ dreptunghic cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle B = 60^\circ$ și $AC = 6$ cm. Să se determine: a) aria triunghiului; b) lungimea cercului circumscris triunghiului; c) perimetrul $\triangle AOC$ rotunjit la cel mai apropiat număr întreg, O fiind centrul cercului circumscris $\triangle ABC$.

2.1. Mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor lor

1. Determinați elementele și cardinalul mulțimilor:

a) $\{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \leq 8\}$ b) $\{x \in \mathbb{N} \mid -5 \leq x \leq 3\}$ c) $\{x \in \mathbb{N}^* \mid -1 < x \leq 4\}$ d) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 7\}$

2. Enumerați elementele mulțimilor:

a) $\{x \in \mathbb{N} \mid 3x + 8 \leq 17\}$ b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid 4x - 5 > 13\}$ c) $\{x \in \mathbb{N} \mid |x| < 5\}$
d) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$ e) $\{x \in \mathbb{N} \mid |2x - 1| < 3\}$ f) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x + 1| \leq 4\}$

3. Determinați elementele mulțimilor:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$ b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^a, a \in A\}$ c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = y, y \in A\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 = a, a \in A\}$ e) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ultima cifră a unui pătrat perfect}\}$

4. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor afirmații:

a) „ $-2 \in \{x \in \mathbb{N} \mid |x + 1| < 3\}$ ” b) „ $\{-2; 4\} \subset \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$ ”
c) „ $-6 \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k - 3, k \in \mathbb{Z}\}$ ” d) „ $1 \in \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3^k, k \leq 4, k \in \mathbb{N}\}$ ”
e) „ $196 \in \{x \in \mathbb{N} \mid x = k^2, k \in \mathbb{N}\}$ ” f) „ $-64 \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x = k^3, k \in \mathbb{Z}\}$ ”
g) „ $4, 5 \in \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| > 2\}$ ” h) „ $\sqrt{3} \in \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 1\}$ ”

5. Scrieți elementele următoarelor mulțimi cu ajutorul proprietăților caracteristice:

a) $\{0; 2; 4; 6; 8\}$ b) $\{13; 15; 17; 19; 21\}$ c) $\{0; 1; 4; 9; 16; 25\}$
d) $\{1; 6; 11; 16; 21\}$ e) $\{1; 2; 4; 8; 16; 32\}$ f) $\{1; 3; 9; 27; 81; 243\}$
g) $\{1; 3; 6; 10; 15; 21; 28\}$

6. Stabiliți dacă următoarele mulțimi sunt finite sau infinite și determinați cardinalul mulțimilor finite:

a) $\{x \in \mathbb{N} \mid -3 \leq x < 278\}$ b) $\{x \in \mathbb{N} \mid |x| < 53\}$ c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 75\}$ d) $\{x \in \mathbb{N} \mid 2^x < 300\}$
e) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 50\}$ f) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ g) $\{x \text{ este cifră} \mid \overline{2x}:2\}$

7. Determinați elementele mulțimilor $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 45 : (4x + 1)\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 10 : (2x + 1)\}$. Aflați $\text{card}(A \cup B)$.

8. Determinați elementele mulțimilor:

$$A = \{a \in \mathbb{Z} \mid 16 : a \text{ și } (a + 1) \mid 15\}$$
 și $B = \{a \in \mathbb{Z} \mid a : 5 \text{ și } (a + 2) \mid 21\}$.

9. Aflați elementele mulțimilor $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid (2a + 1)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\}$ și $B = \{a \in \mathbb{Q} \mid (3a\sqrt{3} + \sqrt{27}) \in \mathbb{Q}\}$.10. Fie mulțimea $A = \left\{-4^0; 0; \sqrt{0,25}; (-8)^0; \frac{298}{149}\right\}$.Aflați elementele mulțimilor $B = \left\{x \in A \mid \frac{1}{x} \in A\right\}$, $C = \{x \in A \mid -x \in A\}$ și $D = \{x \in A \mid |x| \in A\}$.11. Să se afle elementele mulțimilor: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, |x| < 7\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 \leq |x| < 6\}$;
 $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, |x| > 2\}$; $A \cup B$; $A \cap B$; $A \cap C$; $B - C$; $A - C$.12. Să se afle elementele mulțimilor: $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^*, |x| \leq 3\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 2 < |x| \leq 5\}$;
 $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| \geq 0\}$; $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, -3 \leq |x| \leq 6\}$; $A \cap B$; $D - (A \cup B)$; $B \cap C$.

13. Aflați elementele mulțimilor:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\sqrt{3} < x \leq \sqrt{8}\}$ b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 - \sqrt{2} \leq x < 2\sqrt{3}\}$ c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < -3\sqrt{5} < x + 1\}$
 d) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 3\sqrt{3} \leq x^2 \leq 8\sqrt{2}\}$ e) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\sqrt{2} < x^2 \leq 4\sqrt{5}\}$

14. Determinați elementele mulțimilor și cardinalul lor:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2\sqrt{2} \leq |x| < 3\sqrt{3}\}$ b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < \sqrt{x} \leq 5\}$
 c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 3,5 < \sqrt{x+1} < 6,2; \sqrt{x+1} \in \mathbb{N}\}$ d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 < \sqrt{x^2} < 3\sqrt{2}\}$

15. Determinați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $-2 \in \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 4\}$ b) $\sqrt{2} \in \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 2\}$ c) $\sqrt{3} \in \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$
 d) $-7 \in \{x \in \mathbb{Z} \mid 7 : x\}$ e) $91 \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x : 7\}$ f) $1 \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0, |x| = 1\}$
 g) $0 \in \{x \in \mathbb{R} \mid x(x-1)(x-2) = 0\}$

16. Determinați elementele mulțimilor:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \sqrt{x} \in \mathbb{N}, x \leq 50\}$ b) $B = \{\overline{ab} \mid \overline{aa} : \overline{bb} = 2\}$
 c) $C = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} : (a+b) = 3 \text{ rest } 3\}$ d) $D = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} = \overline{ba} + 2a\}$

17. Fie mulțimea $A = \{\overline{abc} \mid a \cdot b \cdot c = 18\}$. a) Aflați cardinalul mulțimii A. b) Calculați probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea A, acesta să se dividă cu 3.

18. Determinați elementele mulțimilor:

a) $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{6}{x+1} \in \mathbb{N}\right\}$ b) $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{24}{3x-1} \in \mathbb{N}\right\}$ c) $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{15}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$
 d) $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{18}{2x-3} \in \mathbb{Z}\right\}$ e) $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{6}{x+5} \in \mathbb{N}\right\}$ f) $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{8}{x-4} \in \mathbb{Z}\right\}$

19. Determinați elementele mulțimilor:

a) $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{2x+1}{x+5} \in \mathbb{N}\right\}$ b) $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{x+7}{x-1} \in \mathbb{N}\right\}$ c) $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{2x+3}{3x-6} \in \mathbb{N}\right\}$
 d) $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x}{4x-7} \in \mathbb{Z}\right\}$ e) $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{2x+5}{5x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$ f) $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{6x+1}{5x+2} \in \mathbb{Z}\right\}$

20. Aflați elementele mulțimilor:

a) $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq \frac{3x+1}{2} < 7\right\}$ b) $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{13}{2x+1} \geq 2\right\}$ c) $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x+1}{9} < \frac{2x+1}{6} \leq \frac{x+1}{4}\right\}$

21. Aflați valoarea de adevăr a propoziției „ $2, (45) \in \{x \in \mathbb{Z} \mid 4x < 10\}$ ”.

22. Precizați cardinalul mulțimilor: a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^{15} < x < 2^{17}\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3^7 \leq x \leq 3^{10}\}$.

2.2. Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor

— Noțiuni de bază

Mulțimea $\{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ se numește interval închis și se notează $[a; b]$.

Se definesc:

- $\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} = (a; b)$
- $\{x \in \mathbb{R} | x < a\} = (-\infty; a)$
- $\{x \in \mathbb{R} | x > a\} = (a; \infty)$
- $\{x \in \mathbb{R} | x \leq a\} = (-\infty; a]$
- $\{x \in \mathbb{R} | x \geq a\} = [a; \infty)$
- $\{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} = [a; b]$
- $\{x | x \in \mathbb{R}, |x| \leq a\} = [-a; a]$
- $\{x | x \in \mathbb{R}, |x| < a\} = (-a; a)$

Operațiile cu mulțimi (reuniunea, intersecția, diferența) se pot efectua și cu intervale.

- $\{x | x \in \mathbb{R}, |x| \geq a\} = (-\infty; -a] \cup [a; \infty)$
- $\{x | x \in \mathbb{R}, |x| > a\} = (-\infty; -a) \cup (a; \infty)$

*

1. Să se afle valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $-2,5 \in [-3; 0)$ b) $\frac{4}{5} \in [1; 2]$ c) $\sqrt{2} \notin (1; 3)$
 d) $[-3; 2) \subset [-4; 3]$ e) $\{-2; 0; 1\} \subset [-2; 2]$ f) $\{-\sqrt{3}; \sqrt{2}; \sqrt{5}\} \subset \left[-2; 2\frac{1}{5}\right]$

2. Să se afle valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $-\sqrt{2} \in (-1; 2)$ b) $-3 \in (-3; 7)$ c) $2\sqrt{5} \in (2; 4,8)$ d) $4 \in (2\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$
 e) $1, (3) \in \left(\frac{4}{3}; \frac{5}{2}\right)$ f) $\frac{8}{3} \in \left(\frac{5}{2}; \frac{21}{5}\right)$ g) $-2\frac{1}{3} \in (-2; 3)$ h) $-5\sqrt{2} \in (-6\sqrt{2}; -7)$

3. Reprezentați pe axa numerelor următoarele intervale:

- a) $[-3; 0)$ b) $(-1; 3)$ c) $(-7; -2)$ d) $(-2; +\infty)$ e) $[3; 7)$
 f) $(-\infty; 4]$ g) $(-10; 2]$ h) $[3; +\infty)$ i) $(-\infty; -1)$

4. Reprezentați pe axa numerelor următoarele mulțimi și precizați ce este figura geometrică apărută (segment, semidreaptă, punct):

- a) $[2; 8)$ b) $\{x \in \mathbb{R} | x - 7 = 0\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} | 2x \leq x\}$ d) $(5; +\infty)$ e) $\{x \in \mathbb{R} | 3 < x + 1 < 7\}$

5. Să se scrie sub formă de interval:

- a) $\{x \in \mathbb{R} | 5 < x < 7\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} | -3 < x \leq 2\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} | -10 \leq x \leq 8\}$
 d) $\{x \in \mathbb{R} | 3 \leq x < 100\}$ e) $\{x \in \mathbb{R} | 0,5 \leq x\}$ f) $\{x \in \mathbb{R} | x < -\sqrt{3}\}$

6. Determinați numărul numerelor întregi din intervalul:

- a) $(-3; 1,2)$ b) $\left(\frac{7}{5}; \frac{11}{2}\right)$ c) $(-2\sqrt{3}; \sqrt{2})$ d) $[-4; -\sqrt{3}]$

7. Aflați cel mic și cel mai mare număr întreg din următoarele intervale:

- a) $[-6; 1,8)$ b) $(2; 7)$ c) $\left[2\frac{1}{3}; \frac{19}{2}\right]$ d) $\left(1, (3); \frac{5}{2}\right)$ e) $(-3\sqrt{5}; 2\sqrt{2})$

8. Să se determine următoarele mulțimi:

- a) $\{x \in \mathbb{R} | x > 4\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} | x < -8\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} | 10 \geq x\}$ d) $\{x \in \mathbb{N} | 4 < x\}$
 e) $\{x \in \mathbb{Z} | -2 \leq x\}$ f) $\{x \in \mathbb{R} | -3 < x\}$ g) $\{x \in \mathbb{N} | -3 \geq x\}$ h) $\{x \in \mathbb{R} | -3 < x \leq -1\}$
 i) $\{x \in \mathbb{R} | -\sqrt{2} > x\}$ j) $\{x \in \mathbb{Z} | -\sqrt{3} < x < \sqrt{2}\}$

**

9. Să se afle valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $|2\sqrt{2}-4|-2(2+\sqrt{2}) \in [-6; -5]$ b) $\frac{5}{8}+2^{-1}+2^{-2}+2^{-3} \in (\sqrt{2}; \sqrt{5})$
 c) $2(-3)^{-1}+(-3)^{-2}+(-3)^{-3} \in (-0, (3); -0, (1))$

10. Determinați mulțimile:

- a) $\{x \in \mathbb{R} | 3x+4 \leq -2\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} | 1-2x < 3\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} | 3-4x \geq x-1\}$
 d) $\left\{x \in \mathbb{R} \left| 1 - \frac{x+1}{2} \leq x \right.\right\}$ e) $\{x \in \mathbb{R} | 3-2(x-3) < x\}$

11. Scrieți sub formă de interval: a) $\{x \in \mathbb{R} | -8 \leq x \leq 0\}$; b) $\{x \in \mathbb{R} | |x| \leq 0\}$; c) $\{x \in \mathbb{R} | |x| \geq 0\}$.

12. Să se determine următoarele mulțimi:

- a) $\{x \in \mathbb{Z} | |x| < 2\sqrt{3}\}$ b) $\{x \in \mathbb{N} | -2,5 \leq x < 10\}$ c) $\{x \in \mathbb{N} | |x| > -2\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} | |x| \geq 2\}$
 e) $\{x \in \mathbb{R} | |x| \leq 2\sqrt{2}\}$ f) $\{x \in \mathbb{N} | |x| < 1 + \sqrt{2}\}$ g) $\{x \in \mathbb{Z} | |x| \leq 1 - \sqrt{3}\}$

13. Determinați mulțimile:

- a) $\{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x+1 < 8\}$ b) $\left\{x \in \mathbb{R} \left| 2 \leq \frac{x+1}{2} \leq 3 \right.\right\}$ c) $\left\{x \in \mathbb{R} \left| -1 \leq \frac{2x+3}{3} \leq 1 \right.\right\}$
 d) $\{x \in \mathbb{R} | |2x+1| \leq 5\}$ e) $\left\{x \in \mathbb{R} \left| \left| \frac{x-2}{3} \right| \leq 4 \right.\right\}$ f) $\{x \in \mathbb{R} | |x+1| \geq 2\}$

14. Să se arate că $\frac{3a+2b}{5} \in (a; b)$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

15. Să se arate că dacă $a, b \in (0; 1)$ atunci: a) $ab-a-b+1 > 0$; b) $b < (3-a)/2$.

16. Să se arate că dacă $[a; b] \subset (2; 5)$ atunci: a) $|a-b| < 3$; b) $ab-5a-2b+10 < 0$.

2.3. Intersecția și reuniunea intervalelor

1. Să se calculeze: a) $(-2; 5] \cup \{-2; -1; 2; 3; 5\} =$ b) $(1; 3) \cup (3; 5) \cup \{1; 3; 5\} =$
 c) $\left(-\frac{3}{2}; 0\right] \cup (-1; 4] =$ d) $\left(-\sqrt{3}; \frac{2}{5}\right] \cup (-\sqrt{5}; 0, (3)) =$ e) $\left\{-1; 0; \frac{4}{5}\right\} \cup (-2; 0,8) =$

2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât:

- a) $[a; 3] \cup (2; 5] = [-3; 5]$ b) $[a; a+1] \cup \left\{1; \frac{7}{4}\right\} = [1; 2]$ c) $[a; 5] \cup [a; \sqrt{2}] = [-1; 5]$

3. Aflați numerele reale x și y dacă: a) $(x; y) \cup (2; 3) = (1; 3]$; b) $[x; y] \cup (-4; 0) = [-4; 0]$.

4. Aflați numerele întregi x și y dacă: a) $(x; y) \cup [5; 6) = [5; 7]$; b) $(x; y) \cup \{1; 2; 3\} = [1; 3]$.

5. Să se calculeze: a) $[2; 4] \cap [4; 7] =$ b) $(-1; 4,5] \cap \{-1; 4; 5\} =$

- c) $\left(-\frac{4}{5}; 1\right] \cap [0; 5] =$ d) $(-3; -\sqrt{2}) \cap [-\sqrt{5}; 4) =$ e) $(-8; 5) \cap [5; 6] =$

6. Aflați numerele reale x și y dacă: a) $(x; y) \cap [3; 5) = (3; 4)$; b) $(x; y) \cap (3; 8) = (4; 6)$.

7. Să se determine x și y numere întregi știind că:

- a) $(x; y) \cap \mathbb{Z} = \{-4\}$ b) $(x; y) \cap \mathbb{Z} = \{1; 2\}$ c) $(0; y) \cap [x; 3) = [x; y]$

8. Aflați elementele mulțimilor $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < 2x + 1 \leq 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\}$ și $A \cap B$.

9. Să se calculeze:

a) $[-3; 5] - (2; 8) =$ b) $[-4; 6] - (-2; 4) =$ c) $(-3; 0) - [-6; 2] =$ d) $[4; 5] - (4; 6)$
 e) $[-\sqrt{2}; 3] - [4; 6] =$ f) $[\sqrt{2}; 5] - \{\sqrt{2}; 8, (6)\} =$ g) $\{-3; 5; -\sqrt{3}; 0; \sqrt{2}\} - [-2; 2] =$

10. Să se calculeze:

a) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| \leq 3\} - (0, (1); 4] =$
 b) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| \geq 3\} \cap [-4; 5)$ c) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| < 4\} - \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| \leq 5\} =$
 d) $\{-2; 0; 2; 3\} \cap \left\{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| \leq \frac{3}{2}\right\} =$ e) $\left\{y \mid y \in \mathbb{R}, -\frac{1}{2} < y \leq 5\right\} \cap \left(4; 6\frac{3}{4}\right] - \left\{4; 5; 6\frac{3}{4}; 7\right\} =$

11. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}, c > 0$ astfel încât: a) $[a; a+1] - \{2; 3\} = (a; a+1)$;

b) $[b-2; b] \cup (b; b+3) = [4; 9]$; c) $[c; 2+3c] - [1-4c; 3c+2) = \{5\}$.

12. Determinați numerele reale x și y știind că:

a) $(3; 7) \setminus (x; y) = (3; 4] \cup [6; 7)$ b) $(3; 5) \setminus (x; y) = (3; 4]$ și $(x; y) \setminus (3; 5) = [5; 8)$

13. Aflați toate perechile de numere întregi x și y care îndeplinesc condiția $(x; y) - (3; 5] = \emptyset$.

14. Să se determine mulțimile și să se calculeze:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 5\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -2 \leq |x| < 1\}$; $A \cup B$; $B - A$; $B \cap \mathbb{N}$

b) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| < -2\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| \leq 0\}$; $A \cap B$; $B \cup A$; $B - A$

c) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, \frac{6}{x} \in \mathbb{N}\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 < x < 4\}$; $A - B$; $B \cap \mathbb{N}$

d) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{-7}{x+1} \in \mathbb{Z}\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 < x \leq 4\}$; $A \cap B$

e) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid 24, x \text{ par}\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| \leq 7\}$; $A - B$; $A \cap B$

f) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 \leq x < 4\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 3\}$; $A \cup B$; $A \cap B$

g) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > -3\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x+1 \leq 2\}$; $A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$

h) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -4 \leq x+1 < 7\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x-2 > 0\}$; $A \cup B$; $A \cap B$

i) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x| \leq 3\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| > 1\}$; $A \cap B$; $B - A$

j) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x+1| \leq 4\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -8 \leq x-3 \leq 2\}$; $A \cap B$; $A \cup B$

k) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x+1| > 3\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 \leq 2x+1 \leq 7\}$; $A \cap B$; $A \cup B$

l) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -4 < \frac{x+1}{3} < 1\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |2x+1| \leq 5\}$; $A \cap B$; $A \cup B$

m) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 \leq \frac{2x+3}{5} < 1\}$; $B = \left\{x \mid x \in \mathbb{R}, \left|\frac{x-2}{3}\right| < 3\right\}$; $A \cap B$; $A \cup B$

15. Aflați valorile reale ale lui x dacă:

a) $(-10; 3-x) \cap (3x+1; 4) = \emptyset$

b) $\text{card}((-\infty; x+1] \cap [2-x; +\infty)) = 1$

c) $(-\infty; 7-3x) \cap (2x+2; 7) = (2x+2; 7-3x)$

16. Să se arate că dacă $(a; b) \cup (2; 4] = (a; b)$ atunci $\frac{2+a-b}{4-b} \geq 1$.

17. Pentru $a \in \mathbb{R}^*$, efectuați: $(a; -a) \cap [-a^2; a^2]$.